Vyšetřování lokálních a globálních extrémů – zatím jednodušší příklady:

1. Vyšetřete na množině M globální a lokální extrémy následujících funkcí:

a) $f(x,y)=x^3+8y^3-6xy+5$, $M=R^2$;
b) $f(x,y)=12xy-x^2y-xy^2$, $M=R^2$;
c) $f(x,y)=(x-y)^2+(y-1)^3$, $M=R^2$;
d) $f(x,y)=x^2+y^2-2y$, $M=R^2$;
e) $f(x,y)=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$, $M=R^2$;
f) $f(x,y)=\sin(x^2+y^2)$, $M=R^2$;
g) $f(x,y)=(x^2+y^2)\cdot e^{-(x^2+y^2)}$, $M=R^2$;
h) $f(x,y)=xy\ln(x^2+y^2)$, $M=R^2-\{(0,0)\}$.

2. Vyšetřete globální extrémy funkce $f(x,y)$ na množině M, je-li:

a) $f(x,y)=x^2y(4-x-y)$, $M=\{(x,y);x\geq 0,y\geq 0,x+y\leq 6\}$;
b) $f(x,y)=xy^2$, $M=\{(x,y);\ x^2+y^2\leq 1\}$;
c) $f(x,y)=x^2+y^2-2y$, $M=\{(x,y);\ x^2\leq y\leq 4\}$;
d) $f(x,y)=xy$, $M=\{(x,y);\ x^2+y^2\leq 1\}$;
e) $f(x,y)=6-4x-3y$, $M=\{(x,y);\ x^2+y^2\leq 1\}$.

Funkce definované implicitně – jednoduché příklady na začátek :

Ukažte, že rovnicí $F(x,y)=0$ je v okolí bodu (x_0,y_0) definována implicitně funkce $y=f(x)$.
Pak i) vypočítejte $f'(x_0)$ a $f''(x_0)$,
ii) napište rovnici tečny ke křivce, dané rovnicí $F(x,y)=0$ v bodě (x_0,y_0),
iii) aproximujte funkci $f(x)$ v okolí bodu $x_0=1$ pomocí Taylorova polynomu 2.stupně, když:

a) $F(x,y)=x^2-y^3+x^2y-1$, $(x_0,y_0)=(1,0)$;
b) $F(x,y)=x^3+y^3-3xy-3$, $(x_0,y_0)=(1,2)$;
c) $F(x,y)=xy-e^x+e^y$, $(x_0,y_0)=(0,0)$;
d) $F(x,y)=xy-\ln x-2$, $(x_0,y_0)=(2,1)$;
e) $F(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}-arctg\dfrac{y}{x}$, $(x_0,y_0)=(1,0)$.